Les multiples racines des nombres naturels
et leurs multiples interprétations

Notes informes à propos d'une idée venue de son ciel
et des merveilleux imbroglios pour enfants et pour adultes
qui s'en suivirent

Par Rémy Droz,
www.contrepointphilosophique.ch
Rubrique Philosophie (Epistémologie)
Février 2004

Résumé

Après une brève critique de la position épistémologique de Piaget concernant le statut et la nature du nombre naturel, je ferai appel aux vues d'un certain nombre d'auteurs respectables du 19ième et du 20ième siècle pour tenter de montrer que pour d'excellentes raisons historiques, mathématiques et épistémologiques, il paraît plausible et de fait nécessaire de postuler une psychogenèse polymorphe de la notion du nombre.

Dans cette perspective, les racines des nombres et des proto-nombres dont se servent les enfants dans leurs pratiques quotidiennes sont à trouver -- successivement et simultanément -- dans les conduites spontanées de classification, de mise en relation, de composition (opératoire), de comptage spontané, ainsi que dans de multiples conduites langagières (etc.). Je discuterai quelques conduites enfantines « naturelles » par rapport à ce modèle.

Par ailleurs, je tenterai de montrer que les approches (par trop) expérimentales de la psychogenèse du nombre ont des caractéristiques nuisibles au développement d'une bonne compréhension de ce que font réellement les enfants. En effet, toute hypothèse formellement raisonnable concernant la psychogenèse d'un modèle particulier du nombre (p.ex., le nombre naturel est « fondamentalement » opératoire (Herbart), le nombre naturel est « fondamentalement » cardinal (Russell), le nombre naturel est « fondamentalement » une synthèse opératoire (Piaget), etc.) conduit à des expériences heuristiquement riches, et susceptibles de consolider l'hypothèse de départ. Malheureusement, ce qui est étudié, ce ne sont pas les comportements spontanés des enfants à propos de nombres, mais les réponses d'enfants à des questions que se posent des chercheurs. Cet ensemble d'hypothèses consolidables à volonté ne permet pas de comprendre comment les enfants s'y prennent pratiquement pour donner raison à tout le monde quelle que soit l'incompatibilité des points de vue en jeu. Il doit y avoir un truc.

1. Epistémogenèse du nombre : la position de Piaget

Piaget postule à maintes reprises que l'épistémogenèse de la notion de nombre naturel est due à un processus psychologique, à savoir la synthèse opératoire des structures de classe (pour être précis, les inclusions de classes) et des relations d'ordre (pour être précis, les structures de sériation)[1]. Cette position véhicule quelques difficultés d'ordre épistémologique et psychogénétique.

Du point de vue épistémologique, il s'agirait notamment

1) de faire savoir au lecteur comment « on » passe d'un système quelconque de classes emboîtées à ce système particulier, où la classe la plus emboîtée ne contient qu'un seul élément. En d'autres termes, il faudrait expliquer clairement comment on passe du genre (ou du concept) à l'individu. A mon avis, Piaget n'a pas choisi d'ignorer ce problème : il n'a pas vu l'importance que revêt le fondement de l'unité dans une construction du nombre et, par conséquent, il a pensé pouvoir s'en sortir avec un raisonnement *ad hoc* fondé sur l'argumentation plausible plutôt que sur une construction rationnelle[2]. Par ailleurs,

2) il serait indispensable de dire au lecteur ce qu'il faut entendre au juste par « synthèse opératoire » du point de vue formel ou logique (Piaget s'en tire toujours par un artifice de notation où il télescope la notation de l'inclusion et la notation de la relation d'ordre -- mais, pour déclencher notre fascination et à plus forte raison notre adhésion, l'essence d'une « synthèse opératoire » ne saurait résider dans un artifice de notation).

Du point de vue psychogénétique, on remarque en particulier

1) que Piaget ne présente aucune expérience sur la psychogenèse du concept de classe singulière (Piaget & Inhelder, 1959 p. 123 *sqq*.),

2) qu'il ne présente aucune donnée empirique concernant le passage de l'universel au particulier (du genre à l'individu),

3) qu'il présente bien une expérience, où il montre que les enfants maîtrisent simultanément des nombres cardinaux et des nombres ordinaux (Piaget & Szeminska, 1941, p. 154 *sqq*.), et une autre expérience, où l'on peut admettre qu'il y a usage conjoint de structures de classe et d'ordre (*op. cit*., p. 136 *sqq*.), mais qu'il ne présente aucune expérience qui démontrerait de la moindre manière la nature (nécessairement) synthétique du nombre naturel. Finalement,

4) Piaget ne rend pas explicite d'un point de vue psychogénétique (ou simplement psychologique !) le concept de « synthèse opératoire ». Les notions qui ressemblent encore le plus à cette idée de synthèse opératoire (Piaget, 1936), la « combinaison nouvelle de schèmes » et « l'assimilation réciproque de schèmes », comme tous les concepts relatifs aux schèmes, n'ont jamais été explicités par Piaget quant à leur nature et quant à leur fonctionnement d'une manière appropriée pour le niveau de la pensée opératoire.

La richesse de la contribution de Piaget ne saurait donc résider dans le fait qu'il démontre, et expérimentalement de surcroît, quelle est la nature du nombre naturel et comment les enfants construisent ce nombre.

L'intérêt des expériences de Szeminska et de Piaget, et leur fécondité heuristique incroyable, réside dans le fait qu'ils démontrent, expériences à l'appui, d'une part, que le champ

---

[1] Après sa première formulation (1939), Piaget s'est exprimé fréquemment sur le sujet (p.ex., Piaget, 1942, 1949, 1967, 1970 ; Beth & Piaget, 1961 ; Piaget & Inhelder, 1966, etc.). Mais, à son habitude, Piaget écrit en introduisant constamment de très légères variations sur ses définitions. Une interprétation (bienveillante !) d'un tel procédé consisterait à dire que le discours de Piaget doit être situé non pas dans l'espace du discours rationnel ou logico-formel, mais dans celui du discours analogico-intuitif. Pour une critique plus serrée, voir Thérien (1985).

[2] Voir Grize (in : Gréco *et alii*., 1960, 1967, ainsi que Piaget, 1949 dont la ré-édition a été réalisée par Grize) qui s'efforce de manière louable à réaliser la quadrature du cercle en tentant de concilier les exigences d'une démarche de logicien avec la tentative de ne pas tordre la visée psychogénétique de Piaget. Pour ce faire, il subordonne ce qu'on peut dire du comportement de l'enfant d'après les observations dont on dispose à ce qu'il conviendrait de dire pour que le discours soit bien respectable du point de vue des logiciens. Malheureusement, le résultat n'est pas entièrement convaincant. Ni du point de vue des enfants, ni du point de vue des logiciens.

du quantitatif n'est pas étroitement lié au domaine du nombre et au comptage (d'où la séduction de ces expériences qui portent sur la conservation des quantités continues et discontinues, la compréhension des correspondances bijectives et leur invariance spatiale, etc.). D'autre part, ils montrent de manière brillante que la pratique du nombre n'est pas nécessairement liée au comptage, comme le pensaient tous les chercheurs, et beaucoup d'enfants, avant eux.

Par ailleurs, Piaget nous a sensibilisé à l'examen attentif de ce que sont, ou de ce que pourraient être, des activités cognitives et, parmi elles, les activités mathématisantes. Piaget les appelle « logico-mathématiques » et elles portent, selon lui, toujours non pas sur des objets en tant que tels, mais sur des collections d'objets en tant que telles[3]. Une liste de telles activités pourrait prendre l'allure suivante :

- remarquer des ressemblances ou des équivalences entre objets	**classer**
- remarquer des différences entre des objets	**ordonner, sérier**
- énumérer, dénombrer des objets,	**compter**
- assembler plusieurs objets en un tout, défaire un tout en éléments	**opérer, composer**
- changer (les caractéristiques d')un objet	**transformer**[4]
- donner à un objet, à une collection d'objets ou à une action un nom	**désigner, noter**[5]

Piaget a admis par la suite que sa « synthèse opératoire » était beaucoup plus tardive qu'il ne l'avait pensé au départ -- en fait, il a fini par admettre qu'elle n'était probablement pas achevée avant le début du stade des opérations formelles, donc vers l'âge de douze à quatorze ans -- et beaucoup plus laborieuse, dans le sens que la maîtrise enfantine des nombres s'établit très progressivement et ne s'étend pas d'un coup (quel qu'en soit le moment) à l'ensemble des nombres naturels (Gréco *et alii*., 1960). Cette aveu tardif aurait mérité un effort particulier pour éclaircir la nature exacte de ce que pourrait être, dans cette nouvelle perspective de genèse longue et lente, une synthèse : en fait, il s'agit d'une construction plus ou moins synchrone, mais surtout interactive, de l'ensemble des opérations logico-mathématiques.

2. Les racines du nombre naturel

Tout le monde se sert de nombres et nous le faisons dès notre (plus tendre !) enfance. Il s'ensuit que nous ne nous souvenons pas très bien comment les nombres sont venus à nous,

---

[3] Voir notamment Apostel, Mays, Morf & Piaget (1957, en particulier les pp. 40 - 85), où un immense effort d'explicitation théorique a été fait. A mon avis, malheureusement avec peu de conséquences durables sur l'oeuvre ultérieure de Piaget qui aurait pu gagner beaucoup de clarté et de transparence, si Piaget avait plus pris au sérieux sa propre écriture.

[4] L'intérêt porte alors sur l'ensemble des caractéristiques, les invariants et les conditions de la transformation, cf. Piaget *et alii*. (1968).

[5] A mon avis, Piaget n'a que très tardivement, et partiellement, reconnu l'importance des fonctions sémiotiques dans l'organisation cognitive de l'individu.

ou comment nous nous y sommes pris pour parvenir à eux. Du coup, quand on tente de dire ce que sont les nombres et d'où ils viennent, on se fabrique une réponse plus ou moins plausible ou séduisante, mais sans très bien savoir comment il faut s'y prendre pour obtenir une réponse *vraie*. D'ailleurs, que veut dire vrai, ici ?

Certains pensent que le nombre nous vient de l'expérience sensible du monde des objets concrets et de l'action qui porte sur eux : à force de regarder et de manipuler des pierres et des bonbons on finit par s'intéresser à leur quantité et à découvrir ainsi le nombre[6].

D'autres sont convaincus, au contraire, que les nombres sont le produit d'une formidable intuition de l'esprit humain. Encore ne sont-ils pas d'accord entre eux quant à la nature de cette merveilleuse intuition : les uns parlent d'une intuition pure. Cela ne veut rien dire, mais cela s'oppose commodément à ceux qui se réfèrent à l'intuition spatiale, à l'intuition temporelle ou encore à l'intuition spatio-temporelle[7].Mais même à l'intérieur de tels schémas les idées sont, de fait, confuses. Ainsi, par exemple, Aristote pense que c'est l'idée de nombre qui explique l'idée de temps et la rend possible, tandis que Kant pense, au contraire, que le temps est l'une des conditions préalables au nombre. Le tout serait de savoir si ce sont les penseurs qui sont confus, ou si c'est leur objet qui apparaît confus, parce que polymorphe.

D'un autre côté, il y a ceux qui sont persuadés qu'il est possible de réduire le nombre à une sorte de principe premier, la logique, par exemple, ou le langage[8]. Mais cela déplaît à ceux qui veulent démontrer que le nombre est, au contraire, une construction originale du sujet[9].

Finalement, cet imbroglio épistémologique est produit sous le regard amusé des sages, donc de ceux qui ne se prononcent pas, et qui pensent que de toutes les manières qu'on y regarde, les nombres ne sont toujours que les signes d'une idée et des signes pour une action[10]. Les nombres n'existent pas. En tous les cas, les nombres ne sont pas des entités concrètes, seuls les signes qui les représentent le sont.

Un paysage aussi luxuriant d'idées sur notre réalité rend songeur. Toutes ces idées sont-elles vraies ? Si oui, sont-elles compatibles les unes avec les autres, ou comment faudrait-il s'y prendre pour les rendre ainsi, puisqu'elles ne le sont manifestement pas ? Si non, y a-t-il au moins une de ces idées qui soit vraie, ou y a-t-il plusieurs qui sont chacune un petit peu vraies ? Compte tenu que chacune de ces idées est le produit de la pensée d'hommes respectables et réputés intelligents (en tous les cas adultes et sains d'esprits, et parfois même

---

[6] On aura reconnu le sensualisme et les positions empiristes de Locke à John Stuart Mill et à Helmholtz, par exemple.

[7] L'idée d'intuition pure appartient à Kant, elle peut aussi être attribuée à Poincaré, mais on pourrait tout aussi bien lui attribuer une interprétation où il serait question d'une intuition liée à l'action propre du sujet : la marche et le rapport d'analogie qu'il y a entre le prochain pas et l'idée de n+1. L'intuition spatiale est centrale dans l'élaboration que les Gestaltistes et leurs successeurs ont pu faire du nombre et de la numérosité. L'intuition temporelle du nombre (en fait il s'agit de l'intuition de l'ordre) a été brillamment défendue par Hermann Weyl (1949), tandis que Ernest Cassirer (1910 ; 1923) souligne l'importance du spatio-temporel, malgré sa position fondamentalement synthéiste.

[8] D'un côté, Russell (1930) et son réductionnisme logique, de l'autre, les remarquables analyses de Ernest Cassirer (1923) qui présente un nombre remarquable d'excellents arguments pour que le lecteur soit amené à consacrer un moment, au moins, à une réflexion sur les rapports qui pourraient exister entre la saisie du réel par les nombres et la saisie du même réel par les mots.

[9] Piaget !

[10] C'est l'idée défendue par le conventionnalisme, initié par David Hilbert (1900), et reprise par de nombreux auteurs plus modernes, par exemple, Lorenzen (1962, Lorenzen & Schwemmer 1975).

vaccinés), y a-t-il des auteurs qui se sont trompés et y en a-t-il qui ont raison ? Et ainsi de suite, avec un peu de malchance à l'infini[11].

On en vient à être tenté par les ignominieux perspectivistes, de Nietzsche à Ortega y Gasset, qui ne sont que des subjectivistes qui se sont travestis pour se donner des airs académiques. On hésite à se rendre du côté du Als-ob (comme si) de Vahinger et de ceux qui déclarent pour mettre leur âme en paix que tout discours scientifique n'est que métaphore. On termine chez Leibnitz, parce que cela assure tout de même un restant de dignité : « Et comme une même ville regardée de différents côtés paraît tout autre, et est comme multipliée perspectivement ; il arrive de même, que par la multitude infinie des substances simples, il y a autant de différents univers, qui ne sont pourtant que les perspectives d'un seul selon les différents points de vue... » (G.W. Leibnitz, Monadologie, 57).

Mais la lie, jusqu'où il s'agit de boire le calice, n'est pas encore atteinte. Buvons !

3. La nature du nombre naturel

Entre le milieu du 19e siècle et les premières années du début de notre siècle, l'interrogation a été intense : que sont les nombres, que peut-on en faire[12]. D'emblée, la distance qui sépare la réflexion des mathématiciens des idées colportées par des gens comme vous ou moi (mais d'époque, s'entend bien) est saisissante : tandis que Russell, par exemple, écrit les *Principia* et s'évertue pour fonder son nombre cardinal[13], Binet s'intéresse en toute candeur aux débuts du comptage spontané chez ses filles, et toute la pédagogie du calcul tourne autour de la question abyssale : faut-il apprendre à compter (Zählmethode), ou faut-il apprendre à reconnaître perceptivement des pluralités (Zahlbildmethode)[14].

En fait, la question de la nature des nombres naturels est aussi confuse que celle concernant les racines des idées sur les nombres[15]. On a, d'une part, les mathématiciens issus d'une tradition de pensée logique, Cantor, Frege ou Russell, par exemple, qui fondent la notion de nombre naturel sur l'idée de la quotité d'un ensemble ou d'une classe et sur la recherche de classes contenant comme éléments des classes équipotentes. Leur nombre naturel sera donc tout naturellement un nombre cardinal. Mais le nombre, tout aussi naturel, dont s'occupe Peano (et que reprendront à leur manière von Neumann ou Weyl) n'est pas un nombre cardinal. Ce qui les fascine, c'est le défilé interminable des nombres qui se suivent : pour eux, l'idée d'un ordre reste présente en permanence (comme paraît rester présente une attitude favorable à l'idée de maintenir une composante temporelle au sein d'une structure abstraite).

---

[11] J'oubliais, il y a encore ceux qui suivent Kronecker et qui pensent que c'est le Bon Dieu qui nous a fait les nombres naturels. Moi, je veux bien, mais alors pourquoi nous a-t-il pareillement embrouillé les idées sur son œuvre ? Y aurait-il eu quelque part un péché Babélien des compteurs, des comptables et des calculateurs ?

[12] Pour que Dedekind (1888) puisse impunément, et avec toute les apparences de la candeur, se demander « Was sind und was sollen Zahlen ? » dans le titre d'un petit livre, il fallait que l'interrogation et la réflexion aient déjà fait un sacré bout de chemin : tant qu'on ignore vraiment, on a besoin de se rassurer, on se donne donc des airs de compétence.

[13] A vrai dire, la position cardinaliste que Piaget et bien d'autres attribuent de manière tellement naturelle à Russell est un peu caricaturale. S'il est vrai que Russell résume ainsi sa position dans un exposé de vulgarisation (1926), il convient de ne pas oublier que dans un ouvrage un peu plus technique (1930) il ne néglige nullement l'aspect ordinal du nombre.

[14] Une première tentative de synthèse de ces deux approches apparemment inconciliables a été proposée par le didacticien Johannes Kühnel (1916)

[15] Pour une brillante revue historico-critique de la question voir H. Gericke (1970) qui expose de manière détaillée les aspects mathématiques points de vue que je développe ici.

De son côté, Hilbert n'est pas fondamentalement intéressé par la nature du nombre, son attention porte sur l'action que le nombre permet, le calcul : arithmétique et algèbre. Car il faut bien comprendre que si l'on souligne la cardinalité ou l'ordinalité des nombres, cela a son prix : il est facile de calculer avec des nombres, mais pour calculer avec des nombres cardinaux il faut prendre d'importantes précautions d'ordre logique, et l'arithmétique qui porte sur les nombres ordinaux est même assez baroque.

La seule interprétation du nombre qui n'intéresse plus personne à cette époque est celle qui a prévalu de l'antiquité à la fin du 18$^{\text{ième}}$ siècle, d'Euclide à Euler : le nombre exprime le rapport entre deux grandeurs ou entre deux quantités. Personne ne se souvient que le grand Herbart (1835/1894, para. 252 *sq.*) fondait sa psycho-pédagogie du calcul sur une idée du nombre comme opérateur : selon lui, l'idée de douze chaises ne suppose pas la représentation mentale d'une douzaine de chaises (cela encombrerait, d'ailleurs, l'esprit autant que les décors d'une pièce d'Ionesco), mais la représentation d'une chaise et du nombre douze qui agit alors comme opérateur (x 12) sur la quantité « chaise » et son unité cardinale, « une chaise ».

Nous pouvons résumer et schématiser cet état de choses de la manière suivante, afin de bien montrer la coexistence simultané de plusieurs perspectives qui sont cependant, au moins de droit, incompatibles. En effet, un nombre défini ne saurait être tout à la fois cardinal **et** ordinal **et** rapport de grandeur, etc., mais nous pouvons nous servir de ces nombres pour envisager ainsi des réalités diverses de manière indépendante ou successive ; ou mieux, pour comprendre l'un des aspects de l'idée de nombre : non seulement les nombres sont multiples, mais tout autant sont multiples les chemins qui y conduisent et les joies qu'ils nous offrent.

Le nombre est	**Perspective théorique**
Cardinal	Cantor, Frege, Russel
Ordinal	Peano, v, Neumann, Weyl,
Algébrique	Hilbert
Constructif	Lorenzen
Opérateur / Rapport	Euclide, Euler, Herbart
Produit du Comptage	E. Cassirer

En nous référant encore aux activités cognitives logico-mathématiques enfantines évoquées plus haut, nous obtenons une esquisse schématique qui illustre bien que l'idée de nombre donne un caractère polymorphe et polysémique aux nombres :

Activité du sujet	**Le nombre est**	**Perspective théorique**
classer	Cardinal	Cantor, Frege, Russel
comparer, sérier	Ordinal	Peano, v, Neumann, Weyl,
noter et composer	Algébrique	Hilbert
noter et compter	Constructif	Lorenzen
transformer	Opérateur / Rapport	Euclide, Euler, Herbart
compter	Produit du Comptage	E. Cassirer

Quant au comptage banal et quotidien, il n'intéresse ni les épistémologistes ni les mathématiciens, si ce n'est pour préciser qu'il ne permet pas de parvenir à une idée digne du nombre naturel. L'opération de comptage « est en réalité très compliquée et ceux qui s'imaginent qu'elle est la source logique des nombres se montrent remarquablement incapables d'analyse. En premier lieu, lorsque nous disons 'un, deux, trois, <...> en comptant, nous ne découvrons pas le nombre d'objets comptés, à moins d'attacher quelque signification aux mots un deux trois <...> Un enfant peut apprendre à connaître des mots dans l'ordre, et les répéter correctement, comme les lettres de l'alphabet, sans y attacher de sens. Cet enfant peut compter correctement du point de vue d'un observateur adulte, sans avoir aucune idée des nombres. L'opération de compter ne peut, en fait, être accomplie intelligemment que par une personne qui a déjà une idée de ce que sont les nombres, et il s'ensuit que l'opération de compter ne donne pas la base logique du nombre » (Russel, 1926, p. 194 s.). Pour avoir une construction formelle convaincante des nombres du comptage, il faudra attendre Lorenzen (1962, Lorenzen & Schwemmer, 1975). Cette construction séduit cependant d'emblée : elle montre que les nombres qui servent à compter sont très simples à fabriquer et à comprendre. A condition qu'on veuille bien qu'il en soit ainsi.

On réalise bien que la tragédie ne fait ainsi que se répéter. Plus haut, à force d'examiner les points de vue possibles sur les racines du nombre naturel, nous avions fini par devoir admettre que la pluralité des points de vues était inévitable, bien que profondément embarrassante. Ici, nous constatons que c'est encore la même chose. Apparemment, on peut légitimement soutenir des points de vue très divergents sur ce que sont les nombres naturels.

Dans cette perspective, il n'y a plus aucun doute possible : le projet et le programme de recherche mis en place par Piaget et Szeminska sont véritablement révolutionnaires, en tous les cas novateurs. Car ils visent à remplacer un débat qui peut paraître n'être fait que de mots, par un ensemble de recherches expérimentales et ainsi, à introduire une[16] réponse empiriquement fondée comme argument dans un débat d'idées. C'est génial.

Malheureusement, Piaget ne se donne pas véritablement la peine de se renseigner de manière précise et exhaustive sur ce qui meuble exactement ce paysage d'idées. Il connaît, de fait, mal les idées de Russell, il ignore Hilbert, il ne s'intéresse pas à Frege et si jamais il a lu du Herbart, le ton pompeux de cet auteur a dû profondément l'ennuyer. Ni du point de vue de l'histoire des idées (ce que j'appelle ici « les racines »), ni du point de vue des idées en mathématiques, Piaget ne s'est réellement donné les moyens d'entrer en plein dans le débat. En postulant sa « synthèse opératoire », il résolvait un problème qu'il était le seul à se poser sous cette forme[17] et l'arrangement de son dispositif méthodologique et expérimental reste quand même assez fragmentaire par rapport à l'étendue du champ du problème.

Malheureusement aussi, et cela je le regrette bien plus, l'art piagétien de donner la réponse avant que la question ne soit bien posée, conduit Piaget et Szeminska a commettre deux erreurs méthodologiques capitales.

Premièrement, Piaget et Szeminska, bien qu'étudiant une gamme de conduites d'une grande richesse, ignorent de nombreuses conduites enfantines spontanées : on peut mépriser les comptines traditionnelles et librement créées, on peut trouver que les nombreux jeux enfantins, où le nombre intervient sous une forme ou une autre, ne sont qu'imposés par les adultes, et ainsi de suite -- ce ne sont que des jugements de valeur. De là à tout simplement faire semblant que ces conduites n'existent pas, que personne ne les jamais perçues en quelque sorte, il y avait un pas à ne pas faire ! L'ouvrage de Piaget et Szeminska aurait exigé, au moins, une introduction tout à fait substantielle qui l'aurait ancré dans son contexte socio-culturel.

Deuxièmement, à examiner l'ouvrage de Piaget et Szeminska, une chose doit étonner le lecteur. Il est, en effet, extraordinaire de constater que Piaget et Szeminska, en rapportant, par exemple, une expérience où il s'agit d'égaliser deux collections de huit et de quatorze éléments respectivement par le transfert d'éléments de l'une des collections à l'autre (Piaget & Szeminska, *op. cit.*, pp. 236-243) ne rapportent l'observation d'*aucune* conduite de comptage

[16] Je dis bien **une**, et non pas plusieurs.

[17] Voir notamment les exposés synthétiques de Piaget (1950, 1967 ; Beth & Piaget, 1961).

et d'aucune conduite qui permettrait de supposer que le sujet aurait procédé par un comptage silencieux. De plus, au troisième stade, aucun enfant cité ne procède par des comptages successifs des deux collections progressivement égalisées par transferts d'éléments pour démontrer leur égalité. Tous les enfants cités ont élaboré une procédure de démonstration de l'égalité des collections basée sur l'établissement d'une bijection entre leurs deux collections égalisées. Je ne conteste pas que Piaget et Szeminska aient réussi à obtenir de telles conduites. Par contre, je m'interroge sur les raisons qui font qu'ils n'ont observé *que* ces conduites. J'ai répété de nombreuses fois cette expérience et j'ai toujours observé que de nombreux enfants comptent, tout simplement (Droz & Paschoud, 1981). J'aurais tendance à conclure que Piaget et Szeminska ont soit manipulé les enfants, par exemple en leur promettant une récompense, s'ils réussissaient à résoudre le problème sans recourir au comptage (j'ai fait l'expérience, aux âges indiqués les enfants réussissent sans problèmes à faire une bijection sans qu'il ne soit nécessaire de leur suggérer directement cette solution, mais ils ne le font pas souvent de manière spontanée), soit ils ont tout simplement éliminé à un moment ou à un autre de leur démarche les protocoles d'enfants qui auraient compté, jugeant que ces conduites étaient trop banales pour devoir être rapportées dans un ouvrage qui avait tout de même une ambition scientifique. Est-il nécessaire de rappeler que les enfants comptent volontiers, et que souvent ils comptent avec beaucoup plus d'intelligence que ne leur en prêtent les savants.

4. Les nombres des enfants

A vrai dire, ce que les enfants parviennent à faire avec des nombres et avec des idées qui pourraient devenir des nombres, si elles étaient achevées, ressemble à s'y méprendre à ce que fabriquent les mathématiciens et autres penseurs patentés que je viens de citer. Ils font n'importe quoi des nombres et de ce qui leur ressemble. Ils en font surtout ce dont ils ont besoin à un moment donné. Il est certain qu'ils ne sont pas aussi adroits que les adultes dans leur maniement des mots et des pensées et que parfois ils ne savent pas très bien ce qu'ils se veulent. Mais ce qu'il faut surtout voir comme étant semblable, c'est leur profond intérêt pour une structure générale qu'on peut interpréter selon ses besoins et qui permet de dénombrer, d'ordonner, de composer, de compter, de quantifier, et ainsi de suite.

D'emblée, me semble-t-il, les enfants traitent les nombres et ce qui leur ressemble comme étant des expressions d'une structure polymorphe et polysémique qu'on peut mettre en oeuvre chaque fois que cela paraît convenir sans en questionner les fondements. Les enfants seraient aussi étonnés que Monsieur Jourdain le jour où il a appris qu'il parlait couramment et sans en avoir fait un apprentissage particulier la prose, si on leur expliquait leurs pratiques des nombres et les structures hypothétiquement sous-jacentes à ces pratiques.

Quelques exemples choisis dans le cadre restreint des comptages devront suffire pour se faire une idée des diversités possibles.

* * *

J'ai toujours pensé que la vraie conquête du nombre et de la pluralité se faisait au moment où l'enfant passait du « un » omniprésent au « deux ». Le reste ne demande qu'un grand effort de généralisation. Quand on a maîtrisé la position debout, qu'on réussit à se maintenir sans s'agripper, tout subitement on dispose de deux mains libres pour s'approprier les plaisirs du monde. Avec une main pour se maintenir, il n'y avait que l'autre main pour tenir le biscuit. Avec deux mains de libres, la capacité de tenir des biscuits passe du simple au double.

* * *

A l'âge de 18 mois L. est assis sur les genoux de son père. Il désigne un bouton de sa chemise et dit « ta » (Droz, 1981). Son père dit « c'est un bouton ». L'opération se répète pour les huit boutons visibles de la chemise paternelle, puis immédiatement après pour les six boutons qui se trouvent sur la blouse de la maman de L. Quelques jours plus tard, L. désigne son pied gauche et dit « ta ». Son père dit « c'est un pied ». L. désigne alors successivement son autre pied, les deux pieds de son père, les deux pieds de sa mère, les pieds (?) du chien en les nommant chaque fois « ta » et en attendant manifestement la confirmation parentale qu'il s'agit bien de pieds. La confirmation lui est donné. Au cours des jours qui suivent, le jeu est répété avec extension aux pieds (?) du cheval et des moutons. Bien que rongés de doutes linguistiques, les parents confirment que tous ces « ta » sont bien des pieds. Des observations analogues ont été faites avec Y., et par d'autres observateurs sur plusieurs enfants du même âge.

Agée de 29 mois, J. explore un matériel constitué de formes géométriques en plastic. Elle déplace successivement les éléments de sa gauche à sa droite en les alignant et dit « et un, et encore un, et un... ». Un peu plus tard elle se livre au même jeu avec une collection de jetons : « toc, et toc, et toc, et toc, ... ».

Ce genre d'observations suscite plusieurs interprétations :
- au cours de leur activité, de très jeunes enfants constituent spontanément (par colligation) des collections d'objets concrets qui sont aussi des objets conceptuels (ou pré-conceptuels) et qui ressemblent à s'y méprendre à des classes d'équivalence,
- de plus, ces enfants prennent manifestement du plaisir à « énumérer » les éléments de ces collections, en fait, ils établissent ainsi des définitions en extension,
- ils « pointent » des objets identiques en n'insistant pas sur la nature de l'objet, mais bien sur une qualité particulière « être un de plus de la même espèce », « appartenir à une collection définie ».

* * *

Beaucoup d'enfants aiment les noms des nombres. Ils ont font des petits poèmes, des comptines inventées, puis ritualisées. Ils s'en servent très tôt pour ponctuer de manière rythmique leur activité. Ils ne s'en servent pas pour compter, du moins pas au début. Ils s'en servent pour chanter, pour marcher, pour s'endormir, pour taper la tête contre le dossier durant un voyage ennuyeux en voiture.

Mais pour commencer à compter réellement, il faut réussir à coordonner le pointage successif d'objets réunis en collection, et la récitation, dans un ordre invariant, des noms des nombres (Droz, 1981). C'est beaucoup plus difficile.

* * *

Une fois que cette coordination est réussi, on sait compter -- plus ou moins bien. En tous les cas, cela permet d'explorer un monde tout nouveau.

A., âgé de deux ans, compte quatre boutons « 1 - 2 - bou – ton », et quatre chevaux « 1 - 2 - che – val », il compte même jusqu'à cinq : « 1 - 2 - 3 ... - 1 – 2 ».

L., trois ans et demi, passe l'épreuve piagétienne de la correspondance bi-univoque (Piaget & Szeminska, 1941, ch. 3). Il établit deux collections équivalentes de jetons rouges et bleus en juxtaposant chaque fois un élément bleu et un élément rouge. L'expérimentateur réunit en tas les jetons rouges. Pour contrôler s'il y a conservation de l'équivalence numérique des collections, L. demande à pouvoir compter. Il compte en pointant. L'expérience est répétée deux fois, L. ne pointe plus, mais il compte toujours. Au troisième essai, L. a établi une opinion définitive, « tu sais, tu peu arranger les machins comme tu veux, ils seront toujours la même chose beaucoup » (expérimentateur : « et si je les mets dans ma poche » ?) « tu penses que je suis bête ? »

R., trois ans et demi, lui aussi (Droz & Paschoud, 1981), a devant lui deux collections numériquement inégales de jetons. Il vient d'avoir constaté par comptage pointé qu'il y a six éléments bleus, et quatre éléments rouges. L'expérimentateur lui dit « mais moi, je voudrais qu'il y ait autant de rouges que de bleus ». R. recompte les bleus « alors 1 - 2 - 3 - 4 - 5 – 6 », puis les rouges « et ça 1 - 2 - 3 - 4, alors ça » (les rouges) « plus peu, et ça » (les bleus) « plus beaucoup ». L'expérimentateur dit « oui », R. ajoute une jeton rouge « j'aurais encore un rouge, alors j'aurai 1 - 2 - 3 - 4 - 5 et ça » (les bleus) « 1 - 2 - 3 - 3 - 4 - 4 - 5 - 6 ... plus encore, les bleus ». L'expérimentateur dit « oui, il y en a plus encore », R. ajoute encore un rouge « alors on met un rouge, et puis » (il compte les bleus) « 1 - 2 - 3 - 4 - 4 - 5 - 6 et » (compte les rouges) « 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 ... la même chose maintenant ! » L'expérimentateur dit « il y a la même chose maintenant ? » R. : « oui ». R. n'a manifestement pas une grande maîtrise des nombres, d'où le besoin qu'il ressent de recompter constamment ses jetons pour s'assurer que leur quantité ne vient pas subitement de changer, mais il sait comparer deux nombres pour savoir lequel est plus grand ; et il maîtrise une opération qui lui donne un pouvoir fantastique : en présence de deux quotités inégales, il sait qu'il suffit d'itérer l'opération (+1) sur la plus petite quotité et de recompter chaque fois la nouvelle quotité obtenue pour qu'il y ait de bonnes chances qu'à un moment donné les deux collections deviennent numériquement équivalentes. Le procédé peut paraître archaïque, mais il est efficace, et R. est encore bien jeune.

Al., quatre ans, a été observé longuement dans une série de situations où il avait l'occasion de compter toutes sortes de choses et de réfléchir sur des situations variées (Mosimann et alii., 1982).

a) Il dispose de deux récipients, l'un avec quatre grosses billes et quatre petites billes, l'autre avec sept grosses billes. Il regroupe dans un récipient les billes jaunes et les compte ainsi « jaune, jaune, jaune, jaune, ... 1..., 1..., ... 1 jaune, 2 ..., ..., 1 jaune - 2 jaunes - 3 jaunes - 4 jaunes, 1 - 2 - 3 – 4 ». On voit de manière impressionnante le processus d'abstraction que Al. met laborieusement en oeuvre pour coordonner deux préoccupations qu'on peut avoir à propos de cette collection : vérifier que les billes sont bien de la même couleur et le prouver, établir combien de billes sont présentes.

b) Après avoir choisi et enfilé quatre grosses perles bleues sur un fil, Al. dit « y en a ... 4 », un peu plus tard, il enfile huit perles sur un fil et compte chacune des perles en la pointant « 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 ... là y en a ... 9 » (il faut dire qu'Al. utilise rarement le nombre cinq, mais comme il oublie ce nombre de manière assez conséquente, ses comptages sont souvent corrects -- à une erreur constante prés). Dans ces deux exemples, Al. compte, mais il tire aussi une conclusion de son comptage : il y a tant d'éléments. Il ne compte pas seulement, il attribue de plus un cardinal à la collection envisagée. Réciproquement, il peut d'abord énoncer le cardinal, puis compter la collection, comme s'il s'agissait de prouver la justesse de son constat.

c) Face à deux collections composées respectivement de six petites, et de six grosses billes, Al. souligne et renforce la correspondance numérique qui existe entre les éléments des deux collections par une sorte de double comptage simultané des deux collections : « 1 - 1, 2 - 2, 3

- 3, 4 - 4, 6 - 6, 7 – 7 ». Le comptage sert tout à la fois à établir l'égalité numérique entre les deux collections et à la démontrer par une procédure de preuve assez originale.

* * *

Quand j'étais au jardin d'enfants, nous avions un jeu qui s'appelait « empereur, empereur, que puis-je faire ? ». L'empereur était proche d'un mur et le regardait, derrière lui à quelques mètres, ses sujets étaient alignés. Tour à tour chaque sujet demandait à l'empereur l'autorisation de faire un mouvement. L'empereur donnait alors, s'il le voulait bien, une autorisation, et le sujet pouvait ainsi se rapprocher de lui. L'objectif de l'empereur était de ralentir autant que possible l'approche de ses sujets, tandis que les sujets trichaient autant qu'ils le pouvaient afin de se rapprocher plus rapidement de l'empereur. L'empereur avait le droit de se retourner pour vérifier que ses sujets ne trichaient pas, s'il les attrapait, ils devaient retourner à leur point de départ.

Du point de vue d'une analyse des nombres enfantins, l'intérêt du jeu de l'empereur réside dans l'inventaire de ce que les sujets étaient autorisés à faire. Il y avait des « pas de géant », des « pas de fourmi », des « pas en arrière », des « tours sur soi-même » et un curieux mouvement qui s'appellait « baignoire » (il consistait à s'allonger par terre à plat ventre et à se relever), etc. Chaque mouvement pouvait être exécuté plusieurs fois, selon les indications de l'empereur : « une baignoire et trois pas de fourmis », « deux pas de géants et un tour sur toi-même », « deux tours sur toi-même et un pas de géant en arrière », etc. Des joueurs sophistiqués introduisaient des opérateurs à fractions.

Ce jeu utilise le nombre comme opérateur. Son intérêt réside dans le fait que les opérateurs ne portent pas sur une seule variété de grandeur, mais sur un assemblage disparate de grandeurs. La complexité du jeu est à la mesure de la complexité de la monnaie anglaise avant la conversion décimale.

* * *

5. Difficultés pour la démarche scientifique

La richesse formidable des conduites enfantines, spontanées ou pouvant être provoquées à volonté, qui ont à faire avec les nombres et avec des nombres, aussi bien que la remarquable diversité du statut mathématique qui existe entre les nombres et les proto-nombres que les enfants traitent, conduisent toutes les deux à supposer que la notion (vraie ? profonde ?) du nombre est aussi polymorphe que la psychogenèse de cette notion. En fait, pour procéder avec intelligence, il faudrait s'exprimer au pluriel et dire ***« les psychogenèses des notions relatives aux nombres naturels »***.

Cela permettrait en tous les cas de comprendre pourquoi la recherche sur le développement de la notion de nombre chez l'enfant est marquée simultanément par quatre caractéristiques qui me paraissent poser problème.

1) D'une part, il y a relativement peu de traits communs entre les différents modèles du nombre mis en oeuvre par les chercheurs pour cette recherche. En fait, il y a non seulement une faible convergence entre le modèles, mais plus généralement un intérêt faible chez les chercheurs pour ce que sont « précisément » les nombres qu'ils vont faire mettre en oeuvre par les enfants dans la recherche qu'ils se proposent de réaliser. Les chercheurs se comportent comme si le lecteur était censé savoir d'emblée de quoi parle le chercheur quand il prononce le mot nombre. A l'extrême limite, on finit par avoir l'impression que de nombreux chercheurs

traitent la problématique du nombre chez l'enfant comme si c'était un problème a/ linguistique : « comprendre » les nombres, c'est savoir se servir des mots appropriés pour les dire ; et b) behavioral : se servir de nombres, c'est savoir tenir un discours à l'aide de ce jargon particulier qui permet être constitué par les noms de nombres. Cela permet naturellement de faire l'économie d'un discours épistémologique qui serait forcément maladroit et malaisé parce qu'il porterait sur une réalité historique aussi confuse que polymorphe. Dans cette perspective, il me semble que le désir épistémologique et le projet épistémogénétique de Piaget ont été fondamentalement méconnus : son intention n'était nullement de montrer comment les enfants parviennent au comptage socialement conforme et à l'arithmétique scolaire, mais bien d'éclaircir la genèse et le statut du nombre (ou des nombres) dans la pensée enfantine. De plus, il ne se laissait pas guider outre mesure par la pensée adulte ambiante, naïve ou sophistiquée, pour en établir une norme que les enfants devaient atteindre après un cheminement plus ou moins long : il postulait bien clairement que la pensée des enfants a le droit d'être qualitativement différente de la pensée des adultes. Sans ce désir d'ouverture proprement épistémologique, la pensée piagétienne n'aurait pu avoir l'influence décisive qu'elle a eue, à plusieurs reprises successives, sur les tentatives de réforme dans le domaine de l'enseignement élémentaire de conduites mathématisantes[18].

2) D'autre part cependant, les démarches de recherche sont marquées par un penchant des chercheurs vers l'exploration de ce qui est « fashionable » à un moment donné (pour une revue assez bien fournie de la question, voir Rauh, 1972). De plus, non seulement y a-t-il des modes, mais comme toutes les modes qu'il faut prendre au sérieux elles se répètent inlassablement. Dans un passé lointain, on s'intéressait naïvement au comptage récemment remis au goût du jour de manière plus sophistiquée par Gelman et Gallistel (1978). Ensuite on s'est intéressé aux classes et aux ensembles. Piaget a été précédé dans cette perspective par un psychologue allemand, gestaltiste ayant entendu parler de Cantor, Johannes Wittmann (1929) qui a développé une conception très originale d'une théorie des ensembles à enseigner aux enfants : il s'agissait d'organiser en une configuration articulée et spatialement organisée une collection en tas d'objets ressemblants et concrets, tels que des jetons. Ainsi, non seulement il faisait oeuvre de pionnier en tentant d'introduire une façon de voir les ensembles dans l'enseignement élémentaire, mais il explorait bien avant la lettre le « subitizing », comme l'avaient fait d'autres qui s'intéressaient à la même chose ou presque, mais en faisant référence à l'acte de colligation (Spaier, 1927). Pendant quelque temps, le chic consistait à « répliquer » les expériences piagétiennes dans une perspective purement psychologique, sans la moindre préoccupation épistémologique. Etc.

S'il n'y a pas de doute que la recherche est toujours en progrès, on n'a cependant pas tellement l'impression qu'elle tire un bénéfice constructif de son passé.

3) Dans toute recherche scientifique il convient de s'interroger sur le contexte dans lequel elle se réalise, sur les prémisses explicites et implicites que pose le chercheur, et sur les finalités qu'il poursuit en réalisant sa recherche. Dans de nombreux cas il me semble, en effet, que ce serait l'explicitation des finalités qui permettrait le mieux de comprendre le fondement et la justification (au sens étroit : les raisons) des hypothèses avancées et des démarches méthodologiques suivies.

---

[18] La séduction que les travaux de Piaget et Szeminska ont exercé sur de nombreux mathématiciens à partir de 1950 ne réside pas dans la qualité mathématique intrinsèque de leurs recherches ou des modèles présentés (structures de groupement), mais dans l'impression irrésistible qu'il y a, à des niveaux de discours forcément très différents, une importante convergence entre la pensée des mathématiciens préoccupés par les fondements des mathématiques et le mode de pensée des jeunes enfants.

Quand on connaît les « pourquoi » et les « pour quoi » sous-jacents à une recherche, l'évaluation de la recherche passe de considérations plus ou moins académiques à une lecture thématisée et orientée. Les critères pour évaluer le degré de réussite d'un projet de recherche qui se réalise ne sont forcément pas les mêmes lorsqu'il s'agit de mettre en lumière, par exemple, les compétences ou les performances enfantines à l'égard d'un problème bien opérationnellement défini, les possibilités d'améliorer l'enseignement scolaire d'une technique donnée (le calcul) ou d'un mode de pensée scientifique (les mathématiques), ou encore lorsqu'il s'agit d'explorer l'étendue et la richesse de l'ensemble des modes de fonctionnement mathématisant (ou mathématicoïde ?) que des enfants peuvent librement déployer dans leur jeux spontanés ou socialisés entre pairs.

4) Finalement, étant donné que les chercheurs tendent, dans leurs pratiques, plutôt à confirmer leurs hypothèses qu'à les infirmer, comme ils devraient le faire en suivant l'exigence canonique de Popper, il me semble que nous accumulons un grand nombre de recherches qui sont excellentes du point de vue technique, mais très peu satisfaisantes quant à leur portée théorique ou quant à leur richesse heuristique. Pour l'essentiel, « on » confirme qu'on a trouvé un chemin supplémentaire qui n'est pas encore falsifié (et qui ne le sera jamais, d'ailleurs), mais « on » ne contribue guère à la construction d'un savoir de nature théorique.

6. Mon problème

Tout cela me conduit --enfin -- à formuler mon problème. Trois constations me guident.

1) Ni les philosophes, ni les mathématiciens n'ont pu nous dire de manière univoque ce que sont les nombres, d'où ils viennent et à quoi ils servent parce que les nombres sont multiples et parce qu'on peut les asservir à des fins multiples.

2) Les enfants ne construisent ni **une** notion du nombre, ni **une** pratique du nombre, mais des notions et des pratiques multiples des nombres multiples qui s'ignorent et qui se reconnaissent, qui interagissent, qui se chevauchent et qui s'interpénètrent, qui se complètent et qui s'excluent mutuellement.

3) Les chercheurs psychogénéticiens réduisent cette richesse à une perspective (fréquemment très) congrue qui leur paraît convenir à un moment donné pour des raisons qu'ils sont seuls à connatre. Leur perspective n'est jamais complètement indépendante de ce que les enfants savent **aussi** faire, si on le leur demande gentiment, mais ce n'est pas **la** seule perspective qu'ils ont et, à plus forte raison, ce n'est pas la seule qu'ils sont capables d'avoir.

4) Finalement, les chercheurs psychogénéticiens explicitent mal les finalités de leurs projets : s'agit-il de mettre en lumière les performances enfantines en les comparant aux performances adultes ; s'agit-il de savoir comment il faut s'y prendre pour enseigner les mathématiques (ou ce qui en tient lieu, compte tenu de l'âge opératoirement tendre des enfants concernés) ; ou s'agit-il de poursuivre le projet de Piaget et Szeminska, à savoir l'analyse psychogénétique d'une genèse spontanée dans les formes multiples qu'elle peut revêtir ?

En raison de telles considérations, je pense que la recherche sur la psychogenèse des notions relatives aux nombres et aux idées plus ou moins informes qui les précèdent restera nécessairement pointilliste et trahit, selon toute vraisemblance, tant du point de vue qualitatif que quantitatif, la générosité, l'originalité et la richesse des pensées et des activités enfantines dans ce domaine.

Personnellement, je suis convaincu que le nombre doit être une idée platonicienne à la fois très simple et incroyablement formidable. C'est la possibilité de continuellement étendre les interprétations du nombre et les sémantisations de ces interprétations du nombre et des nombres qui doit fasciner beaucoup d'enfants, comme elle fascine leurs parents.

Avez-vous déjà réfléchi au statut « mathématicoïde » de votre numéro de téléphone ?

Bibliographie

Apostel, L., Mays, W., Morf, A., & Piaget, J. (1957). *Les liaisons analytiques et synthétiques dans les comportements du sujet.* (Etudes d'épistémologie génétique, Vol. IV.). Paris : Presses Universitaires de France.

Beth, E.W., & Piaget, J. (1961). *Epistémologie mathématique et psychologie.* (Etudes d'épistémologie génétique, Vol. XIV.). Paris : Presses Universitaires de France.

Cassirer, E. (1910, trad. franç., 1977). *Substance et fonction: éléments pour une théorie du concept*. Paris : Editions de Minuit.

Cassirer, E. (1923, trad. franç., 1972). *La philosophie des formes symboliques*. (Vol. 1.). Paris : Editions de Minuit.

Dedekind, R. (1888). Was sind und was sollen Zahlen ? In R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke* (1932, Vol. 3., pp. 335-391). Braunschweig : Vieweg.

Droz, R. (1981). Psychogenèse des conduites de comptage. *Bulletin de l'Académie Nationale de Psychologie*, *1*, 45-49.

Droz, R., & Paschoud, J. (1981). Le comptage et la procédure « (+1)-itéré » dans l'exploration intuitive de l'addition. *Revue Suisse de psychologie*, *40*, 219-237.

Gelman, R., & Gallistel, C.R. (1978). *The child's understanding of numbers*. Cambridge (Mass.) : Harvard University Press.

Gericke, H. (1970). *Geschichte des Zahlbegriffs*. Mannheim : Bibliographisches Institut.

Gréco, P., Grize, J.-B., Papert, S., & Piaget, J. (1960). *Problèmes de la construction du nombre* . (Etudes d'épistémologie génétique, Vol. XI.). Paris : Presses Universitaires de France.

Grize, J.-B. (1967). Remarques sur l'épistémologie mathématique des nombres naturels. In J. Piaget (Dir.) *Logique et connaissance scientifique* (pp. 512-525). Paris : Gallimard.

Herbart, J.F. (1835, trad. franç. 1894). *Principales oeuvres pédagogiques*. Paris: Alcan.

Hilbert, D. (1900). Ueber den Zahlbegriff. *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung*, 180-184.

Kühnel, J. (1916, 1921, 3e éd.). *Handbuch der Pädagogik für ein Sondergebiet, Neubau des Rechenunterrichts*. (Paedagogium, Vol. 6.). Leipzig : Klinkhardt.

Lorenzen, P. (1962). *Metamathematik*. Mannheim : Bibliographisches Institut.

Lorenzen, P., & Schwemmer, O. (1975). *Konstruktive Logik, Ethik und Wissenschaftstheorie*. Mannheim : Bibliographisches Institut.

Mosimann, O., Bovay, M., Dällenbach, J.-F., & Droz, R. (1982). Les nombres d'Alex. Les comptages d'un enfant de quatre ans. *Archives de Psychologie*, *50*, *193*, Monographie *8*, *i-iii*, 91-164.

Piaget, J. (1936). *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Neuchâtel : Delachaux & Niestlé.

Piaget, J. (1939). La construction psychologique du nombre entier. *Compte rendu des séances de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève*, *56*, 92-94.

Piaget, J. (1942). *Classes, relations, nombres*. Paris : Vrin.

Piaget, J. (1949). *Traité de logique ; essai de logistique opératoire*. Paris : Colin (nouvelle édition, révisée en collaboration avec J.-B. Grize (1972) *Essai de logistique opératoire*. Paris : Dunod).

Piaget, J. (1950). *Introduction à l'épistémologie génétique*. (Vol.1.). Paris : Presses Universitaires de France.
Piaget, J. (1967). La construction du nombre naturel. In J. Piaget (Dir.) *Logique et connaissance scientifique* (pp. 405-412). Paris : Gallimard.
Piaget, J. (1970). *L'épistémologie génétique*. (coll. Que sais-je ?). Paris : Presses Universitaires de France.
Piaget, J., Grize, J.-B., Szeminska, A., & Vinh-Bang. (1968). Epistémologie et psychologie de la fonction (Etudes d'épistémologie génétique, vol. XXIII.). Paris : Presses Universitaires de France.
Piaget, J., & Inhelder, B. (1959). *La genèse des structures logiques élémentaires ; classifications et sériations*. Neuchâtel : Delachaux & Niestlé.
Piaget, J., & Inhelder, B. (1966). *La psychologie de l'enfant*. (coll. Que sais-je ?). Paris : Presses Universitaires de France.
Piaget, J., & Szeminska, A. (1941). *La genèse du nombre chez l'enfant*. Neuchâtel : Delachaux & Niestlé.
Rauh, H. (1972). *Entwicklungspsychologische Analyse kognitiver Prozesse*. Weinheim : Beltz.
Russell, B. (1926). *La méthode scientifique en philosophie*. Paris : Payot (ré-éd. Livre de poche, 1971).
Russell, B. (1930, 2e éd.). *Introduction to mathematical philosophy*. London : Allen & Unwin.
Spaier, A. (1927). *La pensée et la quantité*. Paris : Alcan.
Thérien, L. (1985). *La notion de groupement chez Piaget: prolongements formels et applications à la psychologie génétique*. (Thèse, Faculté des Sciences sociales et politiques, Université de Lausanne). Québec : R. Prince.
Weyl, H. (1949). *Philosophy of mathematics and natural science*. New York : Princeton University Press.
Wittmann, J. (1929, 1933, 3e éd rev. et augm.). *Theorie und Praxis eines ganzheitlichen, analytisch-synthetischen Unterrichts in Grundschule, Hilfsschule, Volksschule*. Potsdam : Müller & Kiepenheuer.

www.contrepointphilosophique.ch
Rubrique Philosophie (Epistémologie)
Février 2004